بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه ۱

فصل ۱

ترسیم های هندسی و استدلال

به قلم : استاد بهزاد ستاری

@BehzadSattariMath

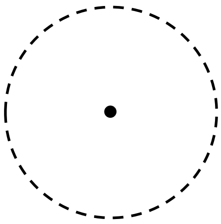
@behzad_sattari_math

www.BehzadSattari.ir

۰۹۳۳۰۵۰۷۱۱۹

درس اول: ترسیم های هندسی

دایره: مجموعهٔ نقاطی در صفحه که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابت، مقداری ثابت باشد. نقطهٔ ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می نامند.

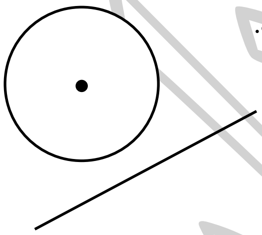


دایره ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(o.r)$ نمایش می دهند.

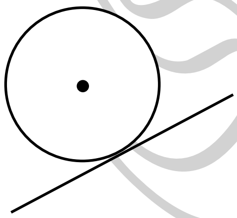
مثال: نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱cm از خط d قرار دارد. نقاطی را روی خط d بیابید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ A برابر با ۲cm باشد.

وضعیت خط و دایره در صفحه: خط و دایره یکی از ۳حالت زیر را نسبت به هم دارند :

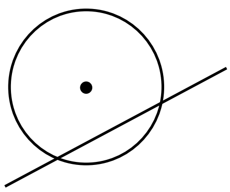
۱) خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. در این حالت فاصلهٔ مرکز دایره از خط بیشتر از شعاع است.



۲) خط بر دایره مماس است (خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند). دراین حالت فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر با شعاع است.



۳) خط دایره را در دو نقطه قطع می کند. در این حالت فاصلهٔ مرکز دایره از خط کوچکتر از شعاع است.



مثال: دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴cm از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که :

الف) از A به فاصلهٔ ۳cm و از B به فاصلهٔ ۲cm باشند

ب) از A به فاصلهٔ ۱cm و از B به فاصلهٔ ۳cm باشند

ج) از A به فاصلهٔ ۱/۵cm و از B به فاصلهٔ ۲cm باشند

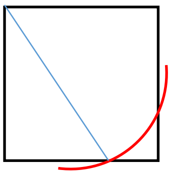
مثال: توضیح دهید چگونه می توان مثلثی به طول اضلاع ۴، ۵ و ۶ را رسم کرد ؟

مثال: طریقهٔ رسم متوازی الاضلاعی به قطرهای ۴ و ۶ را بیان کنید.

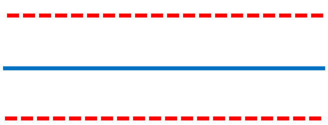
(یادآوری: قطرهای هر متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند)

تست در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع دیگر مربع را قطع می کند. فاصلهٔ نزدیکترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع کدام است ؟ (سراسری ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

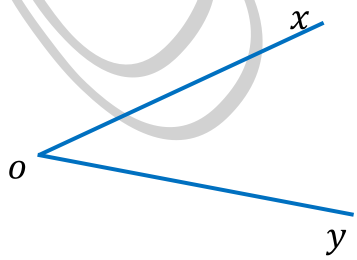


نکته مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها از یک خط ثابت مقداری ثابت می باشد، دوخط به موازات آن در دو طرف خط می باشند.



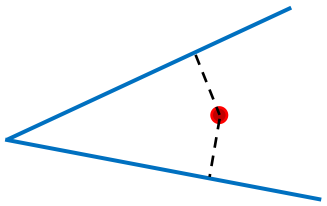
مثال: نقطهٔ O روی خط l قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ O به فاصلهٔ $۳cm$ و از خط l به فاصلهٔ $۲cm$ هستند ؟

طریقهٔ رسم نیمساز یک زاویه : برای رسم نیمساز زاویهٔ $x\hat{o}y$ ، ابتدا به مرکز o و شعاع دلخواه یک کمان رسم می کنیم تا دو ضلع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. سپس به مراکز A و B و شعاع یکسان (بزرگتر از نصف AB) دو کمان میزنیم و محل تقاطع آنها را به o وصل می کنیم تا نیمساز بدست آید.



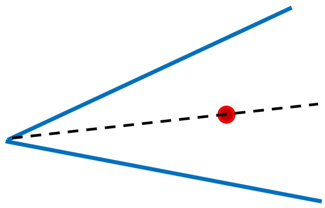
نکته اگر نقطه ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه برابر است. (و برعکس)

اثبات



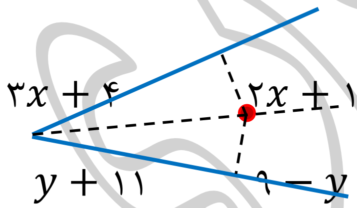
نکته اگر نقطه ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز قرار دارد.

اثبات

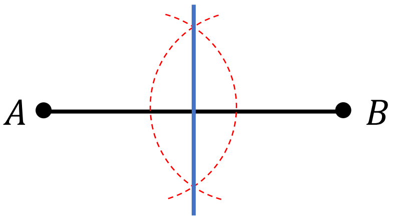


تست در شکل زیر OA نیمساز زاویه است. مقدار $x+y$ کدام است ؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

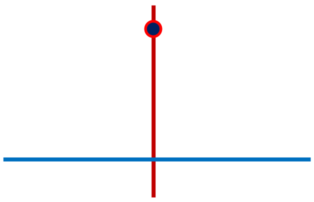


طریقهٔ رسم عمودمنصف یک پاره خط : پاره خط AB را در نظر بگیرید. به مرکزهای A و B و شعاع های یکسان (بزرگتر از نصف AB) دو کمان رسم می کنیم تا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. کافی است محل تقاطع دو کمان را به هم وصل کنیم تا عمودمنصف بدست آید.



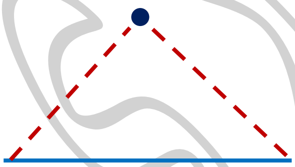
اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، فاصلهٔ آن از دو سر پاره خط برابر است. (و برعکس)

اثبات



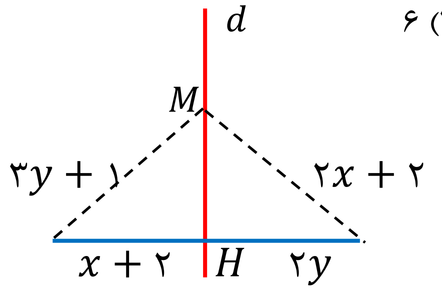
اگر نقطه ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

اثبات



تست در شکل زیر خط d عمودمنصف AB است. اندازهٔ MH کدام است ؟

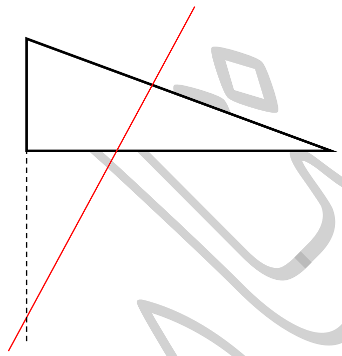
۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶



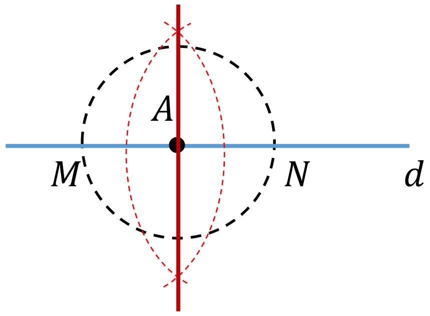
تست در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع کرده است.

فاصلهٔ M از نزدیکترین رأس مثلث کدام است ؟

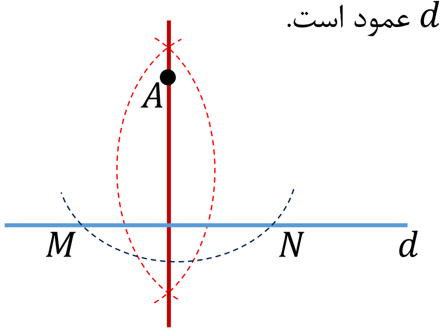
۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$



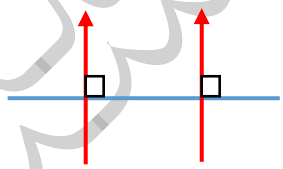
طریقهٔ رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن : خط d و نقطهٔ A روی آن را در نظر بگیرید. ابتدا به مرکز A و شعاع دلخواه یک دایره رسم می کنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند (M و N). حال کافی است عمودمنصف MN را رسم کنیم که از نقطهٔ A میگذرد و بر خط d عمود است.



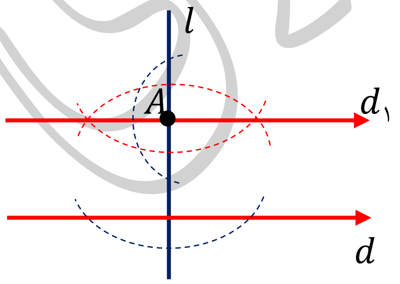
طریقهٔ رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه خارج از آن : خط d و نقطهٔ A خارج از آن را در نظر بگیرید. ابتدا به مرکز A و شعاع بیشتر از فاصلهٔ A تا خط یک کمان رسم می کنیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند (M و N). حال کافی است عمودمنصف MN را رسم کنیم که از نقطهٔ A میگذرد و بر خط d عمود است.



نکته: دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند.

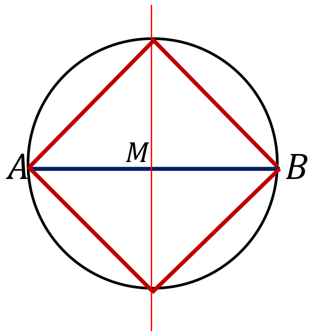


طریقهٔ رسم خطی به موازات یک خط از یک نقطه خارج از آن : خط d و نقطهٔ A خارج از آن را در نظر بگیرید. ابتدا از نقطهٔ A خارج از خط d ، خط l را بر d عمود می کنیم. سپس از نقطهٔ A روی خط l ، خط $d_۱$ را بر l عمود می کنیم. با توجه به اینکه $d_۱$ و d هردو بر خط l عمود هستند پس با هم موازیند. ($d_۱$ از نقطهٔ A میگذرد و با d موازی است)



مثال: طریقهٔ رسم یک مربع که طول قطر آن داده شده است را بیان کنید.

پاسخ: ابتدا قطر AB را رسم می کنیم. سپس عمودمنصف آن را رسم می کنیم و محل تقاطع آن با قطر AB را M می نامیم. حال به مرکز M و شعاع AM یک دایره را رسم می کنیم. محل تقاطع این دایره با عمودمنصف، دو رأس دیگر مربع هستند.



تمرین های درس۱

درس دوم : استدلال

استدلال: به دلایلی که برای اثبات یا رد یک گزاره بیان می شود استدلال گفته می شود .

برخی از مهمترین استدلال ها عبارتند از :

الف) استدلال استقرایی (جزء به کل) : استدلالی که در آن بر اساس مشاهدات محدود، یک نتیجه و حدس کلی بیان می شود. این نوع از استدلال اطمینان بخش و قابل اتکا نیست.

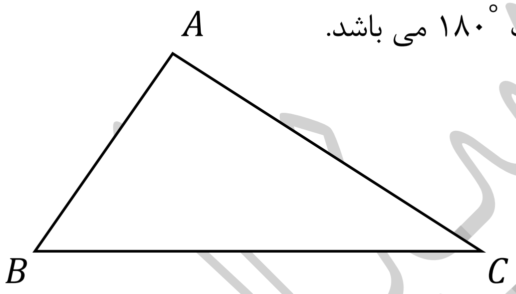
مثال: مشاهده: برف بر اثر حرارت تبخیر می شود – یخ بر اثر حرارت تبخیر می شود – آب بر اثر حرارت تبخیر می شود

نتیجه : هر ماده ای بر اثر حرارت تبخیر می شود.

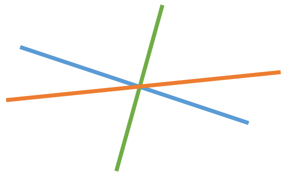
الف) استدلال استنتاجی (جزء به جزء) : استدلالی که در آن بر اساس واقعیت هایی که قبلا درستی آنها را پذیرفته ایم یک نتیجه گیری منطقی را در مورد یک مسأله انجام می دهیم را استدلال استنتاجی می نامند.

نتایجی که از استلال استنتاجی به دست می آیند کاملا درست و قابل استفاده در همهٔ مسأله های دیگر می باشند.

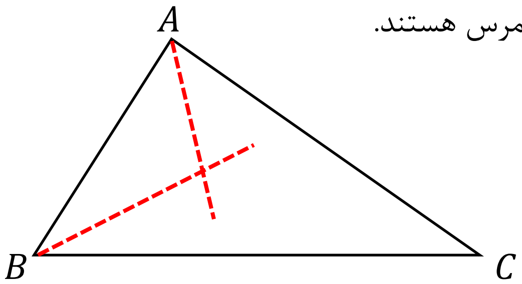
مثال: به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° می باشد.



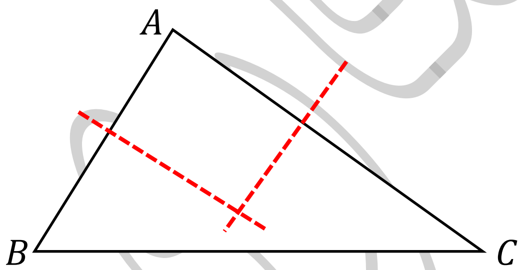
خطوط همرس : اگر چند خط فقط در یک نقطه مشترک باشند آنها را همرس و نقطهٔ مشترک را نقطهٔ همرسی آنها می نامند.



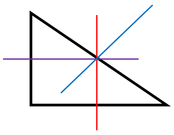
مثال: به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه نیمساز هر مثلث همرس هستند.



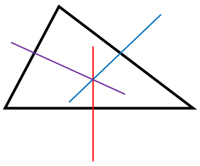
مثال: به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرس هستند.



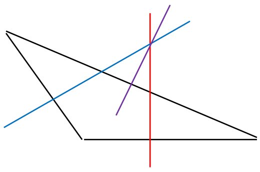
نکته ۱) در هر مثلث قائم الزاویه، محل همرسی عمود منصف ها، وسط وتر می باشد.



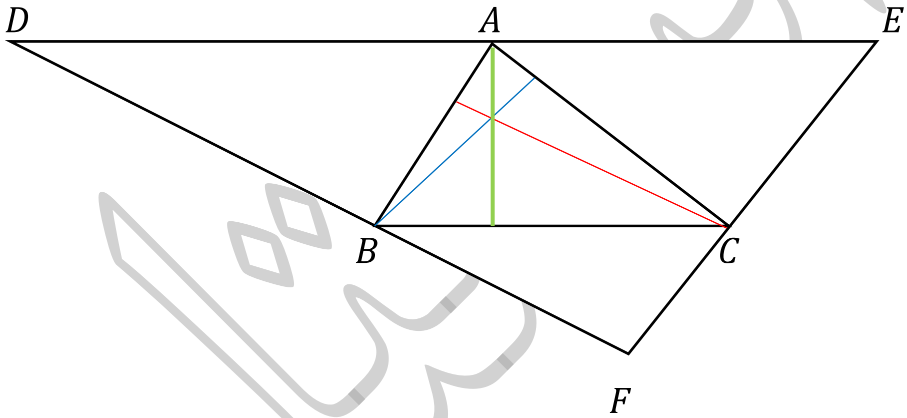
۲) در هر مثلث با زوایای حاده، محل همرسی عمود منصف ها، درون مثلث می باشد.



۳) در هر مثلث با یک زاویهٔ باز، محل همرسی عمود منصف ها، خارج از مثلث می باشد.

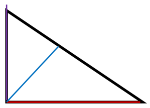


مثال: به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث همرس هستند.

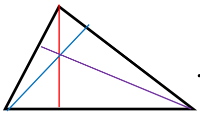


نکته

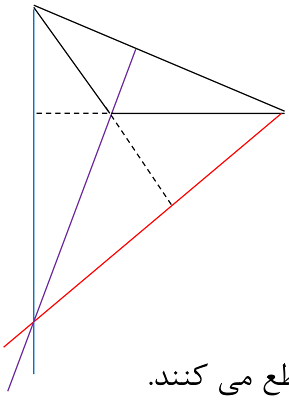
۱) در هر مثلث قائم الزاویه، محل همرسی ارتفاع ها، رأس قائمه می باشد.



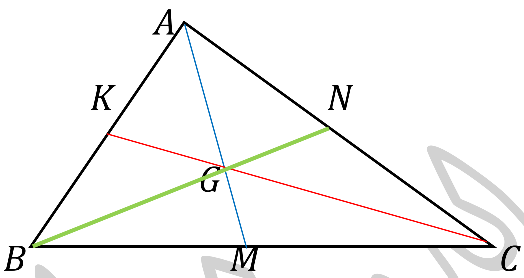
۲) در هر مثلث با زوایای حاده، محل همرسی ارتفاع ها، درون مثلث می باشد.



۳) در هر مثلث با یک زاویهٔ باز، محل همرسی ارتفاع ها، خارج از مثلث می باشد.



نکته سه میانهٔ هر مثلث همرس هستند و همدیگر را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از رأس ها و $\frac{۱}{۳}$ از ضلع ها قطع می کنند.



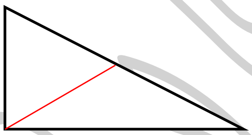
$GA = \frac{2}{3}AM \qquad GM = \frac{1}{3}AM \qquad GM = \frac{1}{2}AG$

نکته

۱) میانه های هر مثلث آن را به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

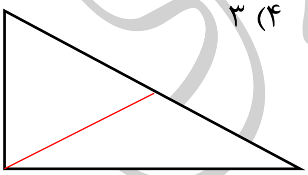
۲) در هر مثلث متساوی الاضلاع، محل همرسی ارتفاع ها، میانه ها، عمودمنصف ها و نیمسازها یکسان است.

۳) در هر مثلث قائم الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.



تست اندازهٔ دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه ای ۸ و $۲\sqrt{۱۱}$ است. فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه ها از وسط وتر کدام است ؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) ۲　　۴) ۳



گزاره : یک جملهٔ خبری که دقیقا درست یا نادرست باشد اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

مثال: کدامیک از جملات زیر گزاره است ؟

۱) به به چه مثلث زیبایی

۲) هشت عددی فرد است

۳) فردا هوا بارانی است

۴) امروز هوا خوب است

۵) کتابت را مطالعه کن

۶) $3 > 2$

گزاره ساده : گزاره ای که فقط یک خبر را بیان می کند.

مثال: هر مثلث ۳ضلع دارد _ در هر مثلث مجموع زوایای داخلی 360° است.

گزاره مرکب : گزاره ای که بیش از یک خبر را بیان می کند.

مثال: ۳عددی فرد و ۵عددی زوج است

نقیض گزاره : جملهٔ خبری که ارزش درست یا نادرست بودن آن دقیقا مخالف ارزش خود گزاره باشد.

مثال: نقیض گزاره های زیر را بیان کنید.

الف) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

ب) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

ج) $a < b$

الف) یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 360° نیست.

قضیه : گزارهٔ شرطی همواره درست که درستی آن را با دلیل و برهان (استدلال استنتاجی) ثابت می کنیم.

هر قضیه از دو بخش فرض و حکم تشکیل می شود. قسمت فرض با کلماتی نظیر اگر، فرض کنید و ... و قسمت حکم با کلماتی نظیر آنگاه ، سپس و ... بیان می شود.

قضیه را به صورت $q \Longrightarrow p$ نمایش می دهند و می خوانیم : اگر p آنگاه q (p فرض و q حکم می باشند).

مثال: اگر مثلث ABC یک مثلث متساوی الساقین باشد ، آنگاه زوایای مجاور آن با هم برابرند.

عکس قضیه : اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس آن قضیه به دست می آید.

عکس یک قضیه می تواند درست یا نادرست باشد.

مثال: عکس قضیه های زیر را بیان کنید و مشخص کنید عکس کدامیک درست و کدامیک نادرست است.

الف) اگر یک مثلث قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دوضلع زاویهٔ قائم

ب) اگر دو مثلث همنهشت باشند، آنگاه هم مساحت هستند.

ج) اگر دو زاویه قائمه باشند آنگاه مکملند.

د) هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.

ه) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد آنگاه قطرهای آن همدیگر را نصف می کنند.

قضیهٔ دوشرطی : اگر عکس یک قضیه درست باشد آنرا قضیهٔ دشرطی می نامند. قضایای دوشرطی را با کلماتی نظیر "اگروتنها اگر" و "اگروفقط اگر" بیان می کنند و آن را با نماد $q \Longleftrightarrow p$ (میخوانیم: p اگروتنها اگر q)

مثال: در مثال قبل کدامیک از قضایا دوشرطی است ؟ صورت دو شرطی آن رابیان کنید.

نکته در هر مثلث دو ضلع برابرند اگروتنها اگر ارتفاع های نظیر آن دو ضلع با هم برابر باشند.

مثال نقض : مثالی که برای رد یک گزاره یا حکم بیان می شود را مثال نقض می نامند.

مثال: برای هریک از احکام زیر مثال نقض بیاورید.

الف) هر چهرضلعی که چهر ضلع برابر داشته باشد مربع است.

ب) محل همرسی ارتفاع های هر مثلث درون مثلث است.

ج) به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲ + n + ۴۱$ عددی اول است.

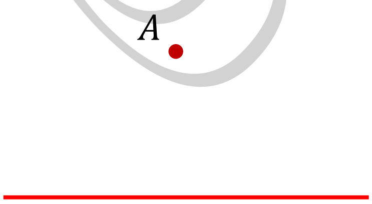
اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) : نوعی استدلال که بر این اصل استوار است که "یک حکم و نقیض آن نمی توانند همزمان با هم درست یا نادرست باشند" و در آن بجای اثبات مستقیم حکم مسأله فرض می کنیم که نقیض آن درست باشد (فرض خلف) و با این فرض به یک تناقض و عبارت غیر ممکن می رسیم و از این تناقض نتیجه می گیریم که فرض خلف ما (نقیض حکم) نادرست است و در نتیجه حکم مسأله درست است.

مراحل برهان خلف : ۱) فرض می کنیم نقیض حکم درست است (فرض خلف)

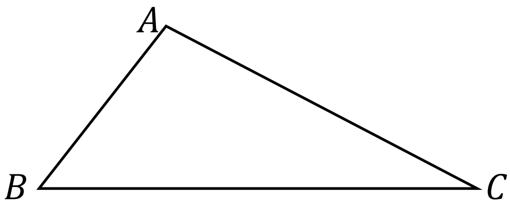
۲) بر اساس فرض خلف به تناقض می رسیم

۳) از تناقض بدست آمده نتیجه می گیریم که حکم مسأله درست است.

مثال: ثابت کنید از یک نقطه خارج از یک خط نمی توان بیشتر از یک عمود بر آن رسم کرد.

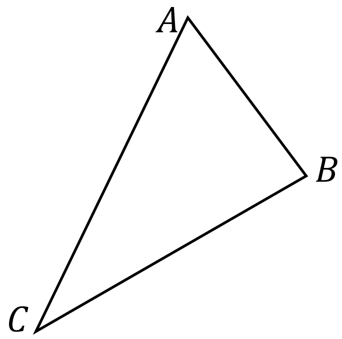


مثال: اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{A} \neq \hat{B}$.



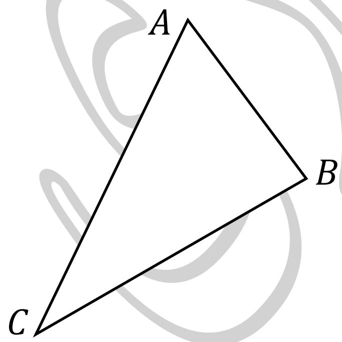
مثال: ثابت کنید اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آنگاه خط دیگر را نیز قطع می کند.

قضیه : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند زاویهٔ روبه رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویهٔ روبه رو به ضلع کوچکتر است.



$$AC > AB \Longrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

عکس قضیه : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ضلع روبه رو به زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه رو به زاویهٔ کوچکتر است.

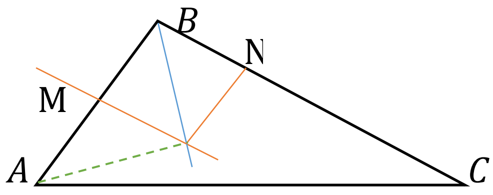


$$\hat{B} > \hat{C} \Longrightarrow AC > AB$$

تست

در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A} > \hat{C}$ ، نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ و عمودمنصف ضلع AB در نقطهٔ D متقاطعند. M و N پای عمودهایی است که از D به ترتیب بر AB و BC رسم شده اند. کدام نابرابری درست است ؟ (سراسری ریاضی _ ۹۵)

۱) $NC > NB$　　۲) $NC < NB$　　۳) $DA > DC$　　۴) $AM < BN$



تمرین های درس۲