

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضی ۳

فصل ۲

مَنَابِت

به قلم : استاد بهزاد ستاری



@BehzadSattariMath



@behzad\_sattari\_math

Website

www.BehzadSattari.ir

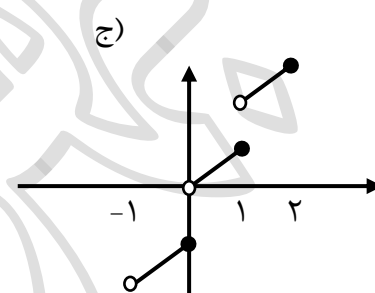
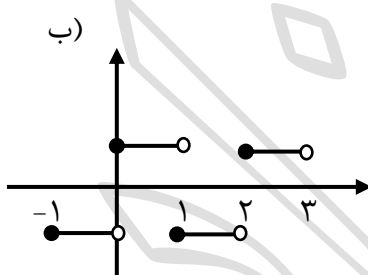
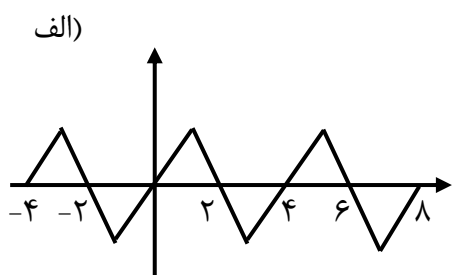
۰۹۳۳۰۵۰۷۱۱۹

درس اول: تناوب و تانژانت

**تابع متناوب:** تابع  $f$  را متناوب می نامیم هرگاه عدد حقیقی مثبتی مانند  $T$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم:  $f(x \pm T) = f(x)$  و  $x \pm T \in D_f$ .

کوچکترین عدد مثبت  $T$  با این خاصیت را دوره تناوب  $f$  می نامند.

مثال: کدامیک از توابع زیر متناوب هستند؟ دوره تناوب آنها را بیابید.



**توابع مثلثاتی:** نسبت های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت در واقع توابعی می باشند که یک زاویه را به عنوان ورودی دریافت می کنند (برحسب رادیان یا درجه) و نسبت مثلثاتی آن زاویه را به عنوان خروجی تحویل می دهند. این نوع از توابع را توابع مثلثاتی می نامند.

ساده ترین توابع مثلثاتی عبارتند از:  $y = \sin x$ ،  $y = \cos x$ ،  $y = \tan x$  و  $y = \cot x$ .

نکته ۱) توابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \cos x$  توابعی متناوب با دوره تناوب  $T = 2\pi$  هستند؛ زیرا با هر دور کامل روی دایره مثلثاتی مقادیر تابع دوباره تکرار می شوند.

۲) توابع  $f(x) = \tan x$  و  $g(x) = \cot x$  توابعی متناوب با دوره تناوب  $T = \pi$  هستند.

۳) در حالت کلی دوره تناوب توابع  $y = a \sin(bx + c) + d$  و  $y = a \cos(bx + c) + d$  برابر است با  $T = \frac{2\pi}{|b|}$ . همچنین دوره تناوب توابع  $y = a \tan(bx + c) + d$  و  $y = a \cot(bx + c) + d$  برابر است با  $T = \frac{\pi}{|b|}$ .

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

الف)  $y = 1 + 2 \sin 7x$

ب)  $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4}x$

ج)  $y = -\pi \sin \frac{1}{4}(x - 2)$

د)  $y = -\pi + \sqrt{2} \tan 3x$

چند نکته در مورد دوره تناوب:

۱) اگر  $f$  یک تابع متناوب با دوره تناوب  $T$  باشد آنگاه تابع  $y = af(bx + c) + d$  نیز متناوب با دوره تناوب  $\frac{T}{|b|}$  است.

۲) دوره تناوب توابع  $y = \sin^{2n-1}(bx)$ ،  $y = \cos^{2n-1}(bx)$  و  $y = A\sin(bx) + B\cos(bx)$  برابر است با  $\frac{2\pi}{|b|}$

۳) دوره تناوب توابع  $y = \sin^{2n}(bx)$  و  $y = \cos^{2n}(bx)$  و  $y = \tan^{2n}(bx)$  و  $y = \cot^{2n}(bx)$  برابر است با  $\frac{\pi}{|b|}$ .

۴) دوره تناوب توابع  $y = [bx] + [-bx]$  و  $y = bx - [bx]$  برابر است با  $\frac{1}{|b|}$ .

۵) توابع مثلثاتی که کمان آنها خطی نیست، متناوب نیستند. مثلا توابع  $y = \sin\sqrt{x}$  و  $y = \tan\frac{1}{x}$  متناوب نیستند.

۶) توابع چندجمله‌ای، گویا و گنگ متناوب نیستند. مثلا توابع  $y = x^2$  و  $y = \frac{3}{x}$  و  $y = \sqrt{x+1}$  متناوب نیستند.

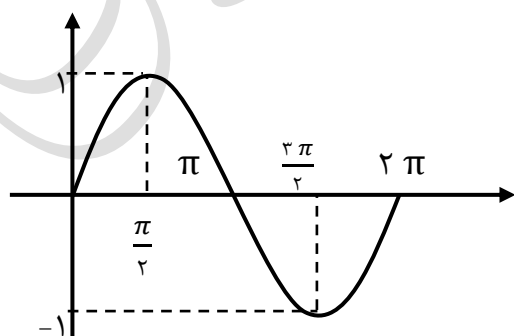
مثال: دوره تناوب توابع زیر را بیابید.  $y = 3\sin^5(2x) - 1$  (الف)

ب)  $y = |\cos(\pi x + 3)|$

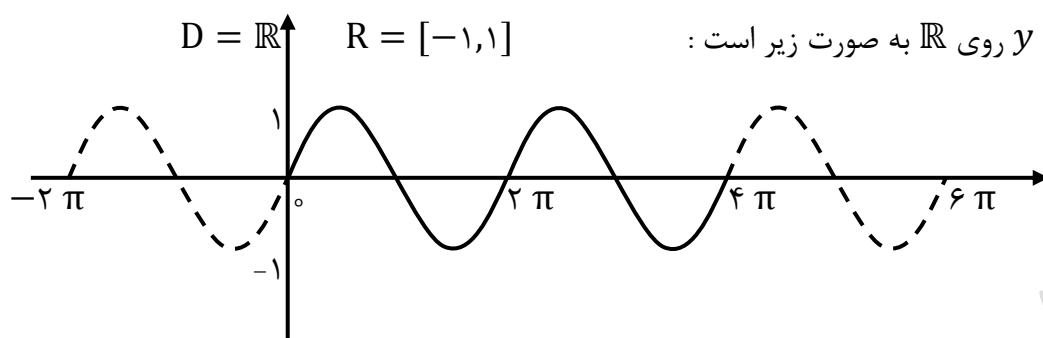
پ)  $y = 3x - [3x]$

نمودار تابع  $y = \sin x$ : دامنه این تابع  $\mathbb{R}$  و برد آن بازه  $[-1, 1]$  می باشد و با توجه به اینکه این تابع، یک تابع متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است، نمودار آن را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم می کنیم:

$x$ (برحسب رادیان)	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$y = \sin x$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$\frac{1}{2}$	$0$	$-\frac{1}{2}$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$



نکته: در تابع  $y = \sin x$  همواره  $x$  برحسب رادیان می باشد مگر آنکه صریحا گفته شود  $x$  برحسب درجه است.



نمودار تابع  $y = \sin x$  روی  $\mathbb{R}$  به صورت زیر است:

نکته

به کمک نمودار تابع  $y = \sin x$  و دایره مثلثاتی مشخص کنید این تابع در چه نقاطی صفر، ۱ و -۱ است؟

مثال

در تابع  $y = a \sin bx$  اگر  $ab > 0$  باشد ( $a$  و  $b$  هم علامت)، نمودار ابتدا دارای ماکسیمم ( $|a|$ ) و سپس دارای مینیمم ( $-|a|$ ) است. اما اگر  $ab < 0$  باشد ( $a$  و  $b$  مختلف‌العلامت)، نمودار ابتدا مینیمم دارد و سپس ماکسیمم دارد.

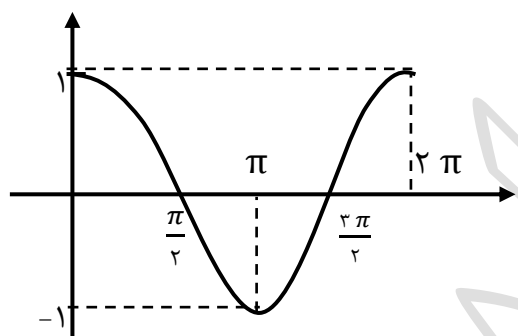
نکته

نمودار توابع  $y = -\frac{1}{4} \sin(\frac{1}{4}x)$  و  $y = -\sin(-2x)$  را رسم کنید.

مثال

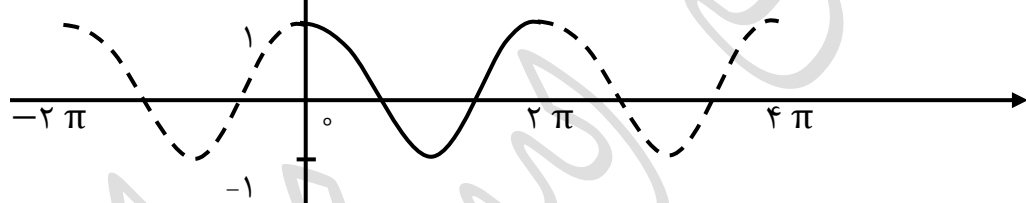
نمودار تابع  $y = \cos x$ : دامنه این تابع  $\mathbb{R}$  و برد آن بازه  $[-1, 1]$  می باشد و با توجه به اینکه این تابع، یک تابع متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است، نمودار آن را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم می کنیم:

$x$ (برحسب رادیان)	$0$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$
$y = \cos x$	$1$	$\frac{1}{2}$	$0$	$-\frac{1}{2}$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$



$D = \mathbb{R}$       $R = [-1, 1]$

نمودار تابع  $y = \cos x$  روی  $\mathbb{R}$  به صورت زیر است:



نمودار تابع  $y = \sin x$  را موج سینوسی و نمودار تابع  $y = \cos x$  را موج کسینوسی نیز می نامند.



به کمک نمودار تابع  $y = \cos x$  و دایره مثلثاتی مشخص کنید این تابع در چه نقاطی صفر، ۱ و -۱ است؟



رابطه بین نمودارهای دو تابع  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$ : با توجه به اینکه  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$  بنابراین اگر

نمودار تابع  $y = \sin x$  را به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  انتقال افقی بدهیم نمودار تابع  $y = \cos x$  بدست می آید.

نکته

در توابع  $y = a \sin(bx) + c$  و  $y = a \cos(bx) + c$  ( $a, b \neq 0$ ) داریم:

$$\max = |a| + c \quad ; \quad \min = -|a| + c \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ دوره تناوب}$$

$$a = \frac{\max - \min}{2} \text{ دامنه موج} \quad ; \quad c = \frac{\max + \min}{2}$$

دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

مثال

الف)  $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب)  $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

ج)  $y = \pi \sin(-x) + 1$

د)  $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم داده شده را بنویسید.

مثال

الف)  $T = \pi$  ;  $\max = 3$  ;  $\min = -3$

ب)  $T = 3$  ;  $\max = 9$  ;  $\min = 3$

ج)  $T = 4\pi$  ;  $\max = -1$  ;  $\min = -7$

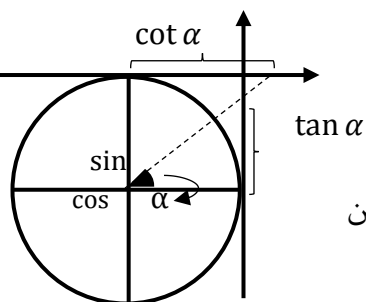
د)  $T = \frac{\pi}{2}$  ;  $\max = 1$  ;  $\min = -1$

مثال (ص ۳۵ کتاب): ضابطه هریک از نمودارهای زیر را به صورت  $y = a \sin(bx) + c$  یا  $y = a \cos(bx) + c$

بنویسید.

بهزاد ستاری

محورهای تانژانت و کتانژانت: دو محور به نام های تانژانت (عمودی) و کتانژانت (افقی)



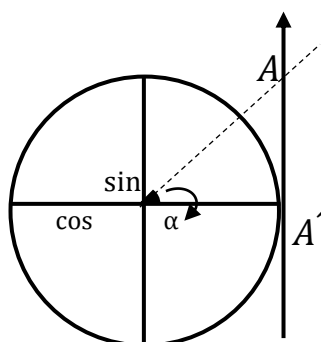
در نقاط  $0, \frac{\pi}{4}$  بر دایره مثلثاتی مماس هستند که این نقاط مبدأ آنها می باشند. برای به دست آوردن تانژانت و کتانژانت یک زاویه کافی است ضلع انتهایی زاویه را امتداد دهیم تا این محورها را قطع کند.

مختصات محل تقاطع این دو محور نقطه  $(1,1)$  است که در زاویه  $\frac{\pi}{4}$  رخ می دهد.

در دایره مثلثاتی روبه رو، برای زاویه  $\alpha$  ثابت کنید  $AA' = \tan \alpha$ .



(راهنمایی: از قضیه تالس استفاده کنید)



تست: باتوجه به شکل مقابل مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

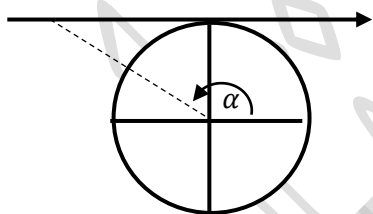
$-\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۱)

$\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۲)

$\frac{-\sqrt{5}}{5}$  (۳)

$\frac{-\sqrt{6}}{6}$  (۴)



به کمک دایره مثلثاتی رفتار نسبت های مثلثاتی را به لحاظ صعودی یا نزولی بودن (افزایش یا کاهش) در چهار

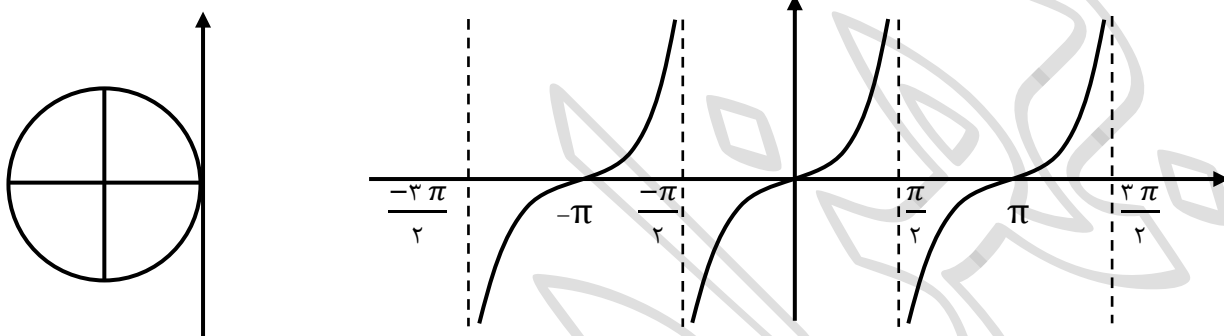


ناحیه بررسی کنید.



نمودار تابع  $y = \tan x$ : با توجه به محور تابع  $y = \tan x$  در دایره مثلثاتی واضح است که این تابع در نقاط  $\frac{\pi}{2}$  و  $-\frac{\pi}{2}$  تعریف نشده است (در حالت کلی در  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ). همچنین چون دوره تناوب تابع  $y = \tan x$  برابر است با  $\pi$  بنابراین نمودار این تابع به صورت زیر خواهد بود:

$x$ (بر حسب رادیان)	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1$	$\sqrt{3}$



مثال الف) دامنه و برد تابع  $y = \tan x$  را مشخص کنید.

ب) یکنوایی تابع  $y = \tan x$  را در کل دامنه و چهار ربع دایره مثلثاتی بررسی کنید و بازه تغییرات آن در هر ربع را بیابید.

تمرین های درس اول

بهبود استادی

## درس دوم: معادلات مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی زاویه  $2\alpha$ : اگر  $\alpha$  زاویه ای دلخواه باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \sin 2\alpha &= 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha & \text{ب) } \cos 2\alpha &= \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases} & \text{ج) } \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \end{aligned}$$

به کمک فرمول های  $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  و  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$  دو فرمول مهم و پرکاربرد زیر را خواهیم

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \implies \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{داشت:}$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \implies \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

نسبت های مثلثاتی زوایای  $15^\circ$  و  $22.5^\circ$  را بیابید.



مثال فرض کنید  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  و  $\alpha$  زاویه ای تند باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $\cos 2\alpha$

ب)  $\sin 2\alpha$

تست: حاصل  $\cos(285^\circ)$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$  (۱)

تست: حاصل عبارت  $\sin(7/5^\circ)\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{8}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۳)

$\frac{1}{8}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

نکته

به کمک نسبت های مثلثاتی  $\alpha$  می توان ثابت کرد:

الف)  $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$

ج)  $\cot\alpha - \tan\alpha = 2 \cot 2\alpha$

ب)  $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

ه)  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

د)  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

تست: حاصل عبارت  $\tan 22/5^\circ + \cot 22/5^\circ$  کدام است؟

$\sqrt{2}$  (۴)

$2\sqrt{3}$  (۳)

$2\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۱)

نکته

برای هر زاویه دلخواه مانند  $\alpha$  داریم:

الف)  $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$

ب)  $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha \mp \frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}$  (۴)

۱ (۳)

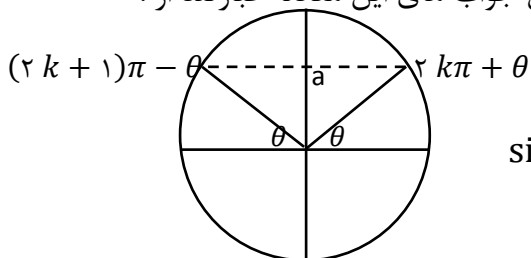
$\frac{-\sqrt{2}}{2}$  (۲)

تست: حاصل  $\sin 10.5^\circ + \cos 10.5^\circ$  کدام است؟ (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

معادلات مثلثاتی

معمولا معادلات مثلثاتی را پس از ساده کردن می توان به یکی از شکل های  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\tan x = a$  و یا  $\cot x = a$  نوشت که دو حالت اول را بررسی می کنیم:

**(۱) معادلات به فرم  $\sin x = a$ :** شرط داشتن جواب برای این معادله این است که  $-1 < a < 1$ . در این حالت ابتدا زاویه  $\theta$  را طوری مشخص می کنیم که  $\sin x = a = \sin \theta$  و سپس جواب های این معادله عبارتند از:



$$\sin x = \sin \theta \implies \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = (2k+1)\pi - \theta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

الف)  $2 \sin x - 1 = 0$

معادلات زیر را حل کنید.



ب)  $4 \sin x + \sqrt{3} = 0$

پ)  $\sin 2x = \sin 3x$

ت)  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

ت)  $\sin x = -\frac{1}{2}$

ث)  $2 \sin^3 x - \sqrt{2} = 0$

برای هر زاویه دلخواه مانند  $\alpha$  داریم :

نکته

الف)  $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

ب)  $\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$

ج)  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

د)  $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$

ه)  $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha \mp \frac{\pi}{4})$

الف)  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

جوابهای معادلات زیر را در بازه  $[0, 2\pi]$  به دست آورید.

مثال

ب)  $\sin x + \cos x = 1$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

$$1) \sin x = 0 \implies x = k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \sin x = 1 \implies x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$3) \sin x = -1 \implies x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{الف) } \sin^2 x = \sin x$$

معادلات زیر را حل کنید.

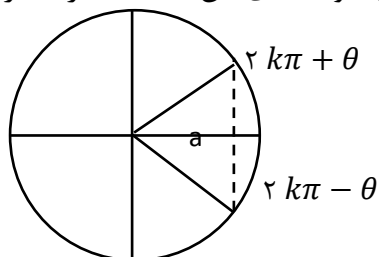


$$\text{ب) } \sin x - \cos^2 x = 0$$

**مثال** یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت  $16 \text{ m/s}$  برای هم تیمی خود که در  $12/8$  متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ  $v$ ، مسافت افقی طی شده  $d$  و زاویه پرتاب به صورت  $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$  باشد، زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟



۲) معادلات به فرم  $\cos x = a$ : شرط داشتن جواب برای این معادله این است که  $-1 < a < 1$ . در این حالت ابتدا زاویه  $\theta$  را طوری مشخص می‌کنیم که  $\cos x = a = \cos \theta$  و سپس جواب‌های این معادله عبارتند از:



$$\cos x = \cos \theta \implies x = 2k\pi \pm \theta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

الف)  $\cos x = \frac{1}{2}$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

ب)  $6 \cos x - \sqrt{18} = 0$

پ)  $\cos x = \cos 2x$

ت)  $\cos x(2 \cos x - 9) = 5$

مثال: جوابهای معادله  $2 \cos x + 1 = 0$  را در بازه  $[-3\pi, \pi]$  به دست آورید.

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

$$۱) \cos x = 0 \implies x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲) \cos x = 1 \implies x = 2k\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$۳) \cos x = -1 \implies x = (2k + 1)\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{الف) } \cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

معادلات زیر را حل کنید.



$$\text{ب) } \cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\text{پ) } \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$\text{ت) } \sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

تمرین های درس دوم

بهبود استادی